数学を活用することによるリスクの可視化

学生団体 POMB 金融工学班

平成 26 年度

Abstract

当研究においては, 金融工学の分野で著名であるブラック-ショールズ方程式を理解することを目的に, さらに金融工学の実践的な利用までを対象と含むものであった. 実際のところそこまでは到達できなかったが, 金利リスクを数学を活用することにより定量化するデュレーション, さらに金利リスクを防衛するイミュニゼーションの考え方を理解するに至ったので, それについて取り上げるものである.

1　はじめに

諸々の考察をするにあたって, 必要な仮定, 導入等をする.

1.1　Investment Science について

当研究において使用した『金融工学入門』において, 原著のタイトルには『Investment Science』と書かれている. 直訳すると「投資科学」である.「金融工学」ときくとなんとも難しそうな印象を持つが, 要は投資をしていかに利益を出すか, 数学を利用して考えてみるものである. 少なくとも金融工学班が 1 年をかけた範囲においては大体そのような内容であった.
本稿は『金融工学入門』に即した内容であるが, 数学的な導出についてはより丁寧に記述するようにした.

1.2　金利と理想銀行

本稿を通して,「金利」という用語がしばしば出てくるが, 金利には単利と複利の 2 種類がある. 本節では単利, 複利について紹介した上で, 考察において必要な仮定である理想銀行について説明する.

1.2.1 単利

単利年 10 %の元で,100 万円を銀行に預けたとき,1 年後の預金は 10 万円増えた 110 万円,2 年後の預金はそこから 10 万円増えた 120 万円 $\cdots$ というように, 預金額は等差数列のように増加していく. 単利年 r%の元で, 金額 F_0 を銀行に預けたとき,n 年後の預金額 F_n について, 数列 $\{F_n\}$ は, 初項 F_0, 公差 $\frac{r}{100}F_0$ の等差数列であるから,

$$F_n = F_0 + \frac{r}{100}F_0 n$$

したがって, 預金額は線形的に増加する.

1.2.2 複利

複利年 10%の元で,100 万円を銀行に預けたとき,1 年後の預金は 10%増えた 110 万円,2 年後の預金はそこから 10%増えた 121 万円 $\cdots$ というように, 預金額は等比数列のように増加していく. 複利年 r%の元で, 金額 F_0 を銀行に預けたとき,n 年後の預金額 F_n について, 数列 $\{F_n\}$ は, 初項 F_0, 公比 $\frac{r}{100}F_0$ の等比数列であるから,

$$F_n = F_0(1 + \frac{r}{100})^n$$

したがって、預金額は幾何的に増加する.
一般に「金利」といえば複利を指す. 本稿でも同様である.

1.2.3 理想銀行

1.2.1 や 1.2.2 での考察は, 金利は常に一定であるもとで成り立つものであった. 実際の市場においては金利は日々変わるが, 金融工学の初歩においては金利は一定であるものと仮定する. 貸し出し, 預金の金利は常に一定であるとし, そのような理想上の銀行を理想銀行と呼ぶ. 本稿の考察対象である「銀行」はすべて理想銀行である.

1.3 キャッシュフロー流列と確定利付証券

1.3.1 キャッシュフロー流列

金銭の受け取りをベクトルにおける成分のように表記したものをキャッシュフロー流列と呼ぶ. たとえば,1 年目に 100 万円,2 年目に 100 万円,3 年目に 100 万円を得て,4 年目に 300 万円を消費した場合,(100 万,100 万,100 万,-300 万) のように表される. この例では 1 年区切りで成分表記したが, 区分けの期間はいつでも良い. ただし区分けの幅は等しくなければならない. 実際は半年区切りのものが多い.

1.3.2　確定利付証券

購入した時点でキャッシュフロー流列が確定している証券のことを確定利付証券と呼ぶ. 本稿ではその中でもとくに, 額面価値 F, クーポン率 c の債券を考察対象の中心にしている. この債券を購入すると, 債券の額面価値 F に対してクーポン率 c を掛けたクーポン cF を定期的（半年が多い）に受け取ることができる. そして, 債券の最終の期末に, クーポン cF に加えて, 額面価値 F を受け取ることができる. すなわち, 購入した時点で $(cF, cF, cF, cF, \cdots, cF, cF + F)$ というキャッシュフローが約束された確定利付証券である.

2　価値計算と債券価格式

キャッシュフロー流列から得られる利益を計算する 2 つの方法と,1.3.2 で扱った債券の価値を数式で表現し, 利回りを導入する.

2.1　将来価値計算

年利 10%, キャッシュフロー流列 (100,100,100) の将来価値は 300 円ではなく, $100(1.1)^2 + 100(1.1) + 100 = 331$ 円である。
このように, キャッシュフローで得られたお金を預金することで得られる総価値のことを将来価値と呼ぶ.

2.2　現在価値計算

現在価値計算は, 将来価値計算とは逆に, キャッシュフロー流列の全体を, 等価な現在の支払い額へと変換する.
たとえば, キャッシュフロー流列 (100,100,100) ならば,
$100 + \dfrac{100}{1.1} + \dfrac{100}{(1.1)^2} \simeq 274$ 円を最初に持っているのと同じである.
したがって, キャッシュフロー流列 (100,100,100) は (274,0,0) と等価である.
債券の分析においては, この現在価値を用いることが多い.

2.3　利回り

1.3.2 で述べたクーポン率 c, 額面価値 F の確定利付証券のキャッシュフロー流列について考える.
クーポンは年 2 回払い, 年利は λ とすると, 支払い時を含めた n+1 期間のキャッシュ

フロー流列は,$(0, cF, cF, cF, \cdots, cF + F)$ と表される.
その現在価値 PV は,

$$PV = \frac{F}{(1+\frac{\lambda}{2})^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{cF}{(1+\frac{\lambda}{2})^k}$$

等比数列の和の公式を用いて式を整理すると,

$$PV = \frac{F}{(1+\dfrac{\lambda}{2})^n} + \frac{cF}{\dfrac{\lambda}{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2}}\right)^n\right)$$

を得る. この債券の価格を P とする.

$$\begin{aligned} P &= PV \\ &= \frac{F}{(1+\dfrac{\lambda}{2})^n} + \frac{cF}{\dfrac{\lambda}{2}} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{2}}\right)^n\right) \end{aligned}$$

を満たす金利 λ を利回りと呼ぶ.
利回り λ が実際の金利と乖離することはほとんどない.
利回りは債券分析、金利リスク分析の強力な道具となる.

3　金利リスク評価

本章では, これまでに導入してきた金融工学の知識を用いて, 金利が変動したときのリスクを定量的に評価することを目指す.

3.1　デュレーション

確定利付証券の総現在価値を PV, 時刻 t におけるキャッシュフローの現在価値を PV(t) とおく. このとき, この確定利付証券のデュレーション D は,

$$D \equiv \frac{1}{PV} \sum_{k=0}^{n} PV(t_k) t_k$$

で定義される.
デュレーションは現在価値による時間の加重平均であり, キャッシュフローがすべて非負ならば,$t_0 \leq D \leq t_n$ が成り立つ.
また, 流列の後半にキャッシュフローの重みがある場合, すなわち後半で受け取る額が大きいとき, デュレーション D は大きくなり,
前半にキャッシュフローの重みがある場合, すなわり前半で受け取る額が大きいときは, デュレーション D は小さくなる.

3.2　修正デュレーション

年 m 回の支払いがあり, 利回りが λ である場合 $(0 < \lambda < 1)$, ある k 期末におけるキャッシュフロー c_k の現在価値 PV_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は,

$$PV_k = \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^k}$$

で表される. これを λ で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dPV_k}{d\ \lambda} &= \frac{c_k}{\left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{k+1}} * \left(-\frac{k}{m}\right) \\ &= -\frac{\frac{k}{m}}{1 + \frac{\lambda}{m}} PV_k\end{aligned}$$

利回り λ の定義から, 債券の価格 P について,$P = \sum_{k=0}^{n} PV_k$ が成り立つ.
両辺を λ で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\ \lambda} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{dPV_k}{d\ \lambda} \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{k}{m} PV_k}{1 + \frac{\lambda}{m}}\end{aligned}$$

ここで, デュレーションの定義から

$$D \equiv \frac{1}{PV} \sum_{k=0}^{n} PV(t_k) t_k$$

ここから

$$\sum_{k=0}^{n} PV(t_k) t_k = D * PV$$

$PV(t_k) = PV_k, PV = P, t_k = \frac{k}{m}$ だから

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{m} PV_k = DP$$

したがって,

$$\frac{dP}{d\ \lambda} = -\frac{D}{1 + \frac{\lambda}{m}} P$$

新たに修正デュレーション D_M を

$$D_M \equiv \frac{D}{1+\frac{\lambda}{m}}$$

として定義すると

$$\frac{dP}{d\,\lambda} = -D_M P$$

3.3　金利リスク評価

3.2 において,

$$\frac{dP}{d\,\lambda} = -D_M P$$

を示した.
$\frac{dP}{d\,\lambda} \simeq \frac{\Delta P}{\Delta\,\lambda}$ として

$$\frac{\Delta P}{\Delta\,\lambda} = -D_M P$$

ここから,

$$\Delta P = -D_M P \Delta\,\lambda$$

これにより, 金利 λ の変化による生じる価格変化が推定できる.

3.3.1　修正デュレーションによる金利リスク評価の例

利回り 10%で 30 年満期のゼロ・クーポン債（流列の最終期末にのみキャッシュフローが支払われる）のデュレーション D は,D=30 年であり,
修正デュレーション D_M は,
$D_M = \frac{30}{1+0.10} = \frac{30}{1.1} \simeq 27.2$ 年

金利 λ が 11%になったとき, つまり $\Delta\,\lambda\ = 0.01$ のときの価値変化 ΔP は

$$\begin{aligned} \Delta P &= -27.2 * P * 0.01 \\ &= -0.272P \end{aligned}$$

P=100 万円であるなら, ΔP=27 万 2 千円, 損失は全体の 27.2%になる.
このことから, ゼロクーポン債は, デュレーションが長いために大きな金利リスクを持つことがわかる.

4　金利リスク防衛

3 において, 金利リスクを修正デュレーションにより近似的ではあるが定量的に評価することを可能にした. そこで, 今度はこの金利リスクを防衛する手段について, イミュニゼーションの考え方を導入する.

4.1　イミュニゼーション

例えば債務などの大きな支出を, 現在投資することにより支払おうとする場合, 金利リスクは非常に重要なものとなる.3.3.1 の例にあるゼロ・クーポン債により立て替えようとする場合, 金利が 1%変動するだけで大損するため高いリスクを持っている. このように金利リスクが及ぼす影響は非常に大きいため, 例えば 10 年後の 100 万円の債務について, この債務の現在価値と等価な債券を購入するだけでは金利変化には対応することはできないことがわかる.
そこで, いくつかの債券を組み合わせて（組み合わせたものをポートフォリオと呼ぶ）, 金利リスクを全体として軽減する. このことをイミュナイズと呼ぶ.

4.2　イミュニゼーション操作

利回りが r, そのときの価格が P(r) の債券を考える. 価格 P は利回り r により変動する.
利回りの定義より, 債券の現在価値は P(r) で,t 期間保持する場合, その将来価値は $P(r)(1+r)^t$ である. これを利回り r で微分すると

$$\frac{d}{dr}\left(P(r)(1+r)^t\right) = P'(r)(1+r)^t + tP(r)(1+r)^{t-1}$$

利回り r が変化しても価格が変わらないためには,
$\frac{d}{dr}\left(P(r)(1+r)^t\right) = 0$ であればよい.
したがって,

$$tP(r)(1+r)^{t-1} = -P'(r)(1+r)^t$$

$$t = -\frac{P'(r)}{P(r)}(1+r)$$

ここで,

$$P'(r) = \frac{dP(r)}{dr} = -D_M P(r)$$

したがって

$$t = \frac{D_M P(r)}{P(r)}(1+r) = D_M(1+r)$$

$D_M = \dfrac{1}{1+r} D$ より、

$$t = D$$

よって, 投資期間をデュレーションにあわせると金利リスクを軽減できることがわかる.

4.2.1　イミュニゼーションの例

X 社には 10 年後に 100 万ドル支払わなければならない債務がある. この債務を満たすのに十分なお金を今投資したいと考えている.
次の 3 つの債券からポートフォリオを構築するものとする.

	利率	満期	価格	利回り
債券 1	6%	30 年	69.04	9.00%
債券 2	11%	10 年	113.01	9.00%
債券 3	9%	20 年	100.00	9.00%

デュレーションをそれぞれ計算すると $D_1 = 11.44, D_2 = 6.54, D_3 = 9.61$ であった.
そこで, 今回は債券 1 と債券 2 からなるポートフォリオをイミュナイズする.
具体的には, 債務の現在価値 (10 年後に 100 万ドルであるから, 今回はおよそ 40 万ドル) と債務のデュレーション (10 年) がポートフォリオのそれと等しくなるような債券 1, 債券 2 への資金量を連立方程式により求める. その結果を以下に示す. 利回りが異なる場合でもポートフォリオの価値は依然として債務の価値にほぼ等しいことがわかる.

		パーセント利回り	
	9.0	8.0	10.0
債券 1			
価格	69.04	77.38	62.14
数量	4,241.00	4241.00	4241.00
価値	292,798.64	328,168.58	263,553.74
債券 2			
価格	113.01	120.39	106.23
数量	1,078.00	1,078.00	1,078.00
価値	121,824.78	129,780.42	114,515.94
債務価値	414,642.86	456,386.95	376,889.48
剰余	-19.44	1,562.05	1,162.20

5　終わりに

理想銀行という条件設定の下で, 一定であるはずの金利が少し変動したとき, 現在価値はどれほど変化するか, また, そのリスクを防ぐためにはどのようにすればよいかを考察してきた. イミュニゼーションは, 実際この仮定がなくとも実用的な手法である.

『金融工学入門』では, この後理想銀行の仮定をはずし, 金利はあるルールに基づいて変化する（期待ダイナミクス）と仮定して, その下で再びデュレーションやイミュニゼーションについて考察を与えている. また, 数理計画や数理統計の方面からのアプローチについても述べられており, 学び甲斐のある学問である. 金融工学班が取り組んだ範囲では, 主にキャッシュフロー流列という名の数列を対象の中心に据えて 1 年間考察していたと言ってもいいと思うが, これら別のアプローチについても学べたらより面白いものになったであろう.

6　参考文献

デービッド・G・ルーエンバーガー著 (2002)『金融工学入門』今野浩, 鈴木賢一, 枇々木規雄訳, 日本経済新聞社.