2016年9月30日

群論班　前期進捗発表

概要

雪江明彦著『代数学1 群論入門』

1. 群の基本
2. 準同型と同型, 剰余類
3. 群の作用とシローの定理

1　群の基本

1.1　群の公理

群の公理（定義）
Gを空集合でない集合とする．G上の演算が定義されていて次の性質を満たすとき, Gを群という.

- 単位元の存在
  単位元と呼ばれる元eが存在し, すべての$a \in G$に対し$ae = ea = a$となる。
- 逆元の存在

すべての$a \in G$に対して$b \in G$が存在し，
$ab = ba = e$となる．この元bをaの逆元と呼び，a^{-1}と書く。

- 結合法則
  すべての$a, b, c \in G$に対し，$(ab)c = a(bc)$が成り立つ．

$ab = ba$ならa, bは可換であるという．
可換群—任意の元が可換な群

群の位数—群Gの元の個数$|G|$

$$a^0 = 1, \overbrace{a \cdots a}^{n} = a^n, a^{-n} = (a^n)^{-1}$$

命題　1.1.1

1. 群の単位元は 1 つしかない.
2. $a \in G$に対し, その逆元は一意に定まる.
3. $a, b \in G$なら$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
4. $a \in G$ なら $(a^{-1})^{-1} = a$

1.2　置換群

置換 $\cdots X$ を集合とするとき全単射写像 $\sigma : X \to X$ を X の置換という．置換 σ, τ の積 $\sigma\tau$ を写像としての合成として定義すると X の置換全体の集合はこの演算により群となる.

定義　1.2.1 X の置換全体からなる群のことを X の置換群という．$X_n = 1, 2, \cdots, n$ とするとき,Xn の置換のことを n 次の置換という．n 次の置換全体からなる群を $\mathfrak{S}$ と表し, n 次対称群と

いう,

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{array} \right)$$

互換$\cdots 1 \leqq i < j \leqq n$のとき$l \neq i, j$なら$\sigma(l) = l$であり,$\sigma(j) = i$であるとき,$\sigma$は置換である。このような置換を$i, j$の互換といい$(i, j)$と書く. もっと一般に, $1 \leqq i_1, \cdots, i_m \leqq n$を全て異なる整数とするとき,

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_m \to i_1$$

と移し, 他の $i \leqq j \leqq n$ は変えない置換を $(i_1 \cdots i_m)$ と書き, 長さ m の巡回置換という.

1.3　環, 体の定義

定義 1.3.1 環の定義
集合 A に2つの演算 $+$ と $\times$ が定義されていて次の性質を満たすとき A を環という. 以下 $a \times b$ の代わりに ab と書く.

1. A は $+$ に関して可換群になる.(以下, $+$ に関す

る単位元を 0 と書く.

2. (積の結合法則) すべての $a, b, c \in A$ に対し, $(ab)c = a(bc)$.
3. (分配法則) すべての $a, b, c \in A$ に対し,

$$a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc$$

4. 乗法についての単位元 1 がある. つまり $1a = a1 = a$ がすべての $a \in A$ に対して成り立つ.

明示的に $0_A, 1_A$ と書くこともある.

$ab=ba$ なら a,b は可換であるという.
A の任意の元 a,b が可換なら A を可換環という.
$ab=ba=1$ が成り立つとき b を a の逆元という.
a^{-1} が存在する元 a を単元や可逆元という.
乗法群 $\cdots A$ の単元全体の集合を $A^{\times}$ と書く. $A^{\times}$ は A の乗法に関して群となり, 乗法群と呼ぶ.
※この本では $1 \neq 0$ を仮定する. (すなわち, 自明な環を除く)

定義　1.3.2 体の定義

集合 K に２つの演算 $+, \times$ が定義されていて次の条件を満たすとき K を可除環という.

1. 演算 $+, \times$ により K は環になる.
2. 任意の $K \ni a \neq 0$ が乗法に関して可逆元である.

環···体：環として可換　···斜体：環として非可換

1.4　部分群

定義　1.4.1 部分群
G を群, $H \subset G$ を部分集合とする. H が G の演算

によって群になるとき, HをGの部分群という.

命題　1.4.2　群Gの部分集合HがGの部分群であるための必要十分条件は次の３つの条件を満たすことである.

1. $1_G \in H$
2. $x, y \in H$なら$xy \in H$
3. $x \in H$なら$x^{-1} \in H$

定義　1.4.3　Gを群, $S \subset G$を部分集合とする. $x_1, \cdots, x_n \in S$により$x_1^{\pm}, \cdots, x_n^{\pm}$という形をした$G$の元を$S$の元による語(word)という．ただ

し, $n=0$ならば語は単位元1_Gを表すとし, ± 1は各x_i毎に1か-1のどちらでもよいとする.

命題　1.4.4　$\langle S\rangle$をSの元による語全体の集合とするとき, 次の２つが成り立つ.

1. $\langle S\rangle$はGの部分群である.
2. HがGの部分群でSを含めば, $\langle S\rangle\subset H$である. つまり$\langle S\rangle$が$S$を含む最小の部分群である.

$\langle S\rangle$のことをSによって生成された部分群, Sのことを生成系, Sの元を生成元という.

定義　1.4.5　巡回群

１つの元で生成される群を巡回群という．群の部分群で巡回群であるものを巡回部分群という．言い換えると群Gが巡回群であるとはある元$x \in G$が存在して, Gのすべての元gがこの固定された元xのべき$g = x^n (n \in \mathbb{Z})$という形をしているということである.

1.5　元の位数

定義　1.5.1 Gを群, $x \in G$とする．もし, $x^n = 1_G$となる正の整数nが存在すれば, その中

で最小のものを x の位数という．もし, $x^n = i_G$ となる正の整数がなければ, x の位数は ∞ である. もしくは x は無限位数であるという.

命題　1.5.2 G が有限群なら, G の任意の元の位数は有限である.

系　1.5.3 $n > 0$ が整数なら,

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{\overline{m} | 0 < m < n, m, n \text{は互いに素}\}$$

命題　1.5.3　p が素数なら, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体である.

命題　1.5.4　H が $\mathbb{Z}$ の部分群なら, 整数 $d \geqq 0$ があり, $H = d\mathbb{Z}$ である.

命題　1.5.5　Gを群, $x \in G$とし, xの位数は有限で$d(> 0)$とする．このとき, $n \in \mathbb{Z}$に対し次の２つは同値である.

1. $x^n = 1_G$
2. nはdの倍数である.

命題　1.5.6　xを群Gの位数$d < \infty$の元, $H = \langle x \rangle$をxで生成された巡回部分群とする．このとき, $|H| = d$である.

2　準同型と同型

2.1　準同型と同型

定義　2.1.1　準同型・同型

G_1, G_2 を群, $\phi : G_1 \to G_2$ を写像とする.

1. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ がすべての $x, y \in G_1$ に対し成り立つとき, ϕ を準同型という.
2. ϕ が準同型で逆写像を持ち, 逆写像も準同型であるとき, ϕ は同型であるという.
3. ϕ が準同型のとき,

$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in G_1 | \phi(x) = i_{G_2}\}$を$\phi$の核という.

4. ϕが準同型のとき, $\mathrm{Im}(\phi) = \{\phi(x) | x \in G\}$を$\phi$の像という.

命題　2.1.2　全単射写像$\phi : G_1 \to G_2$が群の準同型なら, 同型である.

命題　2.1.3　$\phi : G_1 \to G_2$を群の準同型とするとき, 次が成り立つ.

1. $\phi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$である.
2. 任意の$x \in G_1$に対し, $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$

3. $\mathrm{Ker}(\phi), \mathrm{Im}(\phi)$ はそれぞれ G_1, G_2 の部分群である.

２つの群 G_1, G_2 の間に同型写像が存在するなら, 群論的な様々な性質が共通である.

命題　2.1.4　 G_1, G_2 を群, $\phi_1, \phi_2 : G_1 \to G_2$ を準同型とする. もし G_1 が部分集合 S で生成されていて, $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ がすべての $x \in S$ に対して成り立てば, $\phi_1 = \phi_2$ である.

命題　2.1.5　 $\phi : G_1 \to G_2$ が準同型なら, 次の２つは同値である.

1. ϕ は単射である.
2. $\mathrm{Ker}(\phi) = \{1_{G_1}\}$

定義　2.1.6　自己同型群

G を群とするとき, G から G への同型を自己同型という. G の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}G$ と書く. $\phi, \psi \in \mathrm{Aut}G$ なら, その積 $\phi\psi$ を通常の写像の合成 $\phi \circ \psi$ と定義する. すると, $\mathrm{Aut}G$ は恒等写像 id_G を単位元とし, 逆写像を逆元とする群となることがわかる. この $\mathrm{Aut}G$ を G の自己同型群という. また, $g \in G$ に対し, 写像 $i_g : G \to G$ を

$i_g(h) = ghg^{-1}$ と定義するとこれは同型である.

定義　2.1.7　内部自己同型

- i_g という形をした群 G の自己同型のことを内部自己同型という. 内部自己同型でない自己同型のことを外部自己同型という.
- $h_1, h_2 \in G$ とする. $g \in G$ があり $h_1 = gh_2g^{-1} = i_g(h_2)$ となるとき, h_1, h_2 は共役であるという.

命題　2.1.8　G を群とするとき, 写像 $\phi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ を $\phi(g) = i_g$ と定義する. この

とき, ϕは準同型である.

定義　2.1.9　環の準同型・同型

A, Bを必ずしも可換でない環, $\phi : A \to B$を写像とする.

1. $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$がすべての$x, y \in A$に対し成り立ち, $\phi(1_A) = 1_B$であるとき, ϕを準同型という.
2. ϕが準同型で逆写像を持ち, 逆写像も準同型であるとき, ϕは同型であるという. また, このとき, A, Bは同型であるといい, $A \cong B$と書く.

3. A, B が体で, 写像 $\phi : A \to B$ が環としての準同型・同型であるとき, ϕ を体の準同型・同型という.

命題　2.1.10　A, B を環, $\phi : A \to B$ を環の準同型とするとき, $\phi(A^\times) \subset B^\times$ であり, ϕ は群の準同型 $A^\times \to B^\times$ を引き起こす.

2.2　同値類と剰余類

定義　2.2.1　同値関係

集合S上の関係$\sim$が次の条件を満たすとき, 同値関係という．以下a, b, cはSの任意の元を表すとする.

1. 反射律　$a \sim a$
2. 対称律　$a \sim b$ならば$b \sim a$
3. 推移律　$a \sim b, b \sim c$ならば$a \sim c$

定義　2.2.2　同値類

を集合S上の同値関係とする. $x \in S$に対し,

$$C(x) = \{y \in S | y \sim x\}$$

を x の同値類という.

定義　2.2.3　$\sim$ を集合 S 上の同値関係とする.

1. S の部分集合で $C(x)(x \in S)$ という形をしたものの全体の集合を $S/\sim$ と書き, 同値関係による商という. S の元 x に対して $C(x) \in S/\sim$ を対応させる写像を S から $S/\sim$ への自然な写像という.
2. $S/\sim$ の元 C に対して, $x \in C$ となる S の元を C の代表元という.
3. S の部分集合 R が $S/\sim$ の各元（つまり同値類）

の代表元をちょうど１つずつ含むとき, Rを同値関係$\sim$の完全代表系という.

定義　2.2.4　左剰余類・右剰余類
Hを群Gの部分群, $x, y \in G$の同値類をxHと書き, xのHによる左剰余類という．この同値関係による商, つまり左剰余類の集合をG/Hと書く. 同様にして右剰余類も定義される.
命題　2.2.5　Hが群Gの部分群なら, 次の２つが成り立つ.

1. $|G/H| = |H \setminus G|$である.

2. 任意の $g \in G$ に対し, $|gH| = |Hg| = |H|$

定義　2.2.6　$G/H, H \setminus G$ の元の個数を $(G : H)$ と書き, H の G における指数という. 定理　2.2.7　ラグランジュの定理　上の状況で $|G| = (G : H)|H|$ である,

系　2.2.7　G を有限群とするとき, 次の２つが成り立つ.

1. H が G の部分群なら, $|H|$ は $|G|$ の約数である.
2. $g \in G$ の位数は $|G|$ の約数である.

命題　2.2.8　G を位数が素数 p の群とする．このとき, $G \ni x \neq 1_G$ なら $G = \langle x \rangle$ である．したがって, G は巡回群である.

2.3　正規部分群と剰余群

定義　2.3.1　正規部分群
H を群 G の部分群とする．すべての $g \in G, h \in H$ に対し, $ghg^{-1} \in H$ となるとき, H を G の正規部分群といい, $H \lhd G$, あるいは $G \rhd H$ と書く.

命題　2.3.2　G_1, G_2 が群で $\phi\colon G_1 \to G_2$ が準同型なら, $\mathrm{Ker}(\phi)$ は G_1 の正規部分群である.

命題　2.3.3　N は群 G の部分群で, G, N はそれぞれ部分集合 S, T で生成されているとする. このとき, すべての $x \in S, y \in T$ に対し $xyx^{-1}, x^{-1}yx \in N$ なら, N は正規部分群である. もし G が有限群なら, 条件 $xyx^{-1} \in N$ だけで充分である.

系　2.3.4　G を群, $S \subset G$ とする. このとき,

$$N = \langle \{xyx^{-1} | x \in G, y \in S\} \rangle$$

はSを含む最小のGの正規部分群である.

補題　2.3.5　Nが群Gの正規部分群で$g \in G$なら, $gN = Ng$である.

定理　2.3.6　G/Nは以下の演算により群になる.

$$(gN)(hN) \overset{\mathrm{def}}{=} ghN$$

定義　2.3.7　剰余群

G/Nに上の演算を考えたものを, GのNによる商群または剰余群という.

命題　2.3.8　自然な写像$\pi : G \to G/N$は群の

全射準同型である. また, $\mathrm{Ker}(\pi) = N$ である.

2.4　準同型定理

定理　2.4.1　準同型定理 $\phi : G \to H$ を群の準同型とする. $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}(\phi)$ を自然な準同型とするとき, 下図が可換図式となるような準同型 $\psi : G/\mathrm{Ker}(\phi) \to H$ がただ 1 つ存在し, ψ は $G/\mathrm{Ker}(\phi)$ から $\mathrm{Im}(\phi)$ への同型となる.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/\mathrm{Ker}(\phi) \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

定理　2.4.2　準同型定理(部分群の対応) N を群 G の正規部分群, $\phi : G \to G/N$ を自然な準同型とする. G/N の部分群の集合を $\mathbb{X}$, G の N を含む部分群の集合を $\mathbb{Y}$ とするとき, 写像

$$\phi : \mathbb{X} \ni H \mapsto \pi^{-1}(H) \in \mathbb{Y}, \psi : \mathbb{Y} \ni K \mapsto \pi(K) \in \mathbb{X}$$

は互いの逆写像である．したがって，集合 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ は一対一に対応する.

命題　2.4.3　第二同型定理

H, N を群 G の部分群で $N \triangleleft G$ とする．このとき，次の２つが成り立つ.

1. HN は G の部分群となる．また $HN = NH$ となる.
2. $H \cap N \triangleleft H, HN/N \cong H/H \cap N$ である.

命題　2.4.4　第三同型定理

G を群，$N \subset N'$ を G の正規部分群とするとき，

次の２つが成り立つ.

1. 準同型$\phi : G/N \mapsto G/N'$で$\phi(xN) = xN'$となるものがある.
2. $(G/N)/(N'/N) \cong G/N'$

命題　2.4.5　準同型の分解

$\phi : G \to H$を群の準同型とする. $N \subset G$が正規部分群なら, $\pi : G \to G/N$を自然な準同型とするとき, 下図が可換図式となるような準同型$\psi : G/N \to H$が存在するための必要十分条件は

$N \subset \mathrm{Ker}(\phi)$ となることである.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/N \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

3　群の作用

3.1　群の作用

定義　3.1.1群の作用

Gを群, Xを集合とする. GのXへの左作用とは,
写像$\phi : G \times X \ni (g, x) \mapsto \phi(g, x) \in X$であり,
次の２つの性質を満たすものである.

1. $\phi(1_G, x) = x$
2. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$
3. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(hg, x)$を満たすなら右作用

という.

$\phi(g,x)$ の代わりに $g\cdot x$ と書いたり・を省略して書くこともある.

命題　3.1.2　群 G が集合 X に作用すると, $g\in G$ に対して定まる写像 $X\ni x\mapsto gx\in X$ は全単射である.

補題　3.1.3　$\mathrm{SO}(2)=\{R_\theta|\theta\in\mathbb{R}\}$

命題　3.1.4

1. $g\in \mathrm{O}(n)$ なら, $\det g=\pm 1$
2. $(\mathrm{O}(n):\mathrm{SO}(n))=2$

定義　3.1.5　二面体群整数 $n > 2$ を固定する. P_n を単位円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接し, $[1, 0]$ を 1 つの頂点とする正 n 角形とする.

$$D_n = \{g \in \mathrm{O}(2) | gP_n = P_n\}$$

とおき, 二面体群という.

命題　3.1.6

1. 関係式 $t^n = 1, r^2 = 1, rtr = t^{-1}$ が成り立つ
2. $|D_n| = 2n, D_n = \{1, t, \cdots, t^{n-1}, r, rt, \cdots rt^{n-1}\}$

3. $rt^i(i=0,\cdots,n-1)$の位数は2である.

命題　3.1.7 群Gが有限集合$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$に左から作用するとする．このとき,
$g\cdot x_i=x_{\rho(g)(i)}(i=1,\cdots,n)$とおく．命題3.1.2にあるように, $\rho(g)$は$1,\cdots,n$の置換を引き起こし, 写像$\rho:G\to\mathfrak{S}_n$を定める．このρは群の準同型でXへの作用により定まる置換表現という.

定義　群Gが集合Xに作用するとする.

1. $x\in X$のとき$Gx=\{gx|g\in G\}$と書き, xのGによる軌道という.

2. $x \in X$ があり, $Gx = X$ となるとき, この作用は推移的であるという．また, x は G の等質空間であるという.

3. $x \in X$ のとき $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ と書き, x の安定化群という．軌道の記号と混同しやすいときには, 軌道を $G \cdot x$ とも書く.